

УДК 539.3

А. В. МЕНЬШИКОВ, канд. физ.-мат. наук,
М. В. МЕНЬШИКОВА, канд. физ.-мат. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Известно, что контактное взаимодействие берегов трещин под воздействием гармонической нагрузки оказывает существенное влияние на распределение компонент напряженно-деформированного состояния [1–5]. Численные результаты при учете контактного взаимодействия берегов были получены с использованием метода коллокаций и кусочно-постоянной аппроксимации для двумерных [1, 2, 5, 6] и трехмерных [2–4] задач. В данной статье решена задача о контактном взаимодействии берегов прямолинейной трещины под воздействием нормальной гармонической волны растяжения-сжатия. Численное решение получено методом Галеркина с кусочно-линейной аппроксимацией. Проведено сравнение с результатами, полученными методом коллокаций.

Постановка задачи. Рассмотрим однородное изотропное линейно-упругое двумерное пространство с прямолинейной трещиной без начального раскрытия с поверхностью $\Omega = \{-l \leq x_1 \leq l, x_2 = 0\}$. Гармоническая волна растяжения-сжатия, падающая с частотой ω перпендикулярно к поверхности трещины, определяется функцией

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1 x_2 - \omega t)},$$

где $k_1 = \omega / c_1$ — обобщенное волновое число; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ — скорость продольных волн; λ и μ — постоянные Ламе; ρ — плотность материала. На берегах трещины

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathfrak{T} := [0, T].$$

Здесь $\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \left(0, -k_1^2 \operatorname{Re}[\Phi_0 e^{-i\omega t}]\right)$ — нагрузка, вызванная падающей волной; $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ — вектор сил контактного взаимодействия.

Для нормальных компонент векторов нагрузки и разрыва перемещений выполняются ограничения [1, 2]

$$\Delta u_2(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_2(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_2(\mathbf{x}, t) q_2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \mathfrak{T}. \quad (1)$$

Конфигурация изменяющейся во времени области контактного взаимодействия берегов трещины не известна заранее и определяется в ходе решения задачи.

Метод решения. Решение задачи будет периодическим, но не гармоническим. Представим компоненты напряженно-деформированного состояния тригонометрическими рядами Фурье [1, 2]

$$p_2(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{2,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(p_{2,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{2,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

$$\Delta u_2(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{2,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Delta u_{2,\cos}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{2,\sin}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t) \right),$$

где

$$p_{2,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_2(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt;$$

$$p_{2,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T p_2(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt;$$

$$\Delta u_{2,\cos}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta u_2(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt;$$

$$\Delta u_{2,\sin}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \Delta u_2(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt;$$

$k \in N_0$ (натуральные числа и нуль); $\omega_k = 2\pi k/T$, T – период колебаний; $p_2^k(\mathbf{x})$, $\Delta u_2^k(\mathbf{x})$ – коэффициенты Фурье, связанные системой граничных интегральных уравнений

$$p_{2,\cos}^k(\mathbf{x}) - i p_{2,\sin}^k(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \left(F_{22}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) + i F_{22}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \right) \left(\Delta u_{2,\cos}^k(\mathbf{y}) - i \Delta u_{2,\sin}^k(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}; \quad (2)$$

$F_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ – функция с известным представлением [1, 2, 5].

Поверхность трещины будем аппроксимировать множеством линейных элементов $\Omega_j^h := [\mathbf{x}^{h,j}; \mathbf{x}^{h,j+1}]$, ($j = \overline{1, N}$). Тогда любая непрерывная пробная функция может быть представлена в виде [7]

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{N+1} N_q(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}^{h,q}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^h := \bigcup_{j=1}^N \Omega_j^h.$$

Здесь $N_q(\mathbf{x})$ – кусочно-линейные функции формы; $f(\mathbf{x}^{h,q})$ – значения функции f в узлах $\mathbf{x}^{h,q} = (x_1^{h,q}, 0)$, причем

$$\begin{aligned} x_1^{h,q} &= -l \left(\frac{N+2-2q}{N} \right)^\alpha \quad (q = \overline{1, N/2+1}), \\ x_1^{h,q} &= -x_1^{h, N+2-q} \quad (q = \overline{N/2+2, N+1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Положим внутренние произведения взвешенных невязок равными нулю, причем весовые функции принадлежат к тому же семейству функций, что и функции формы. Тогда матричная форма рассматриваемой системы линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\mathbf{F}^k \mathbf{U}^k = \mathbf{P}^k, \quad k \in N_0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^k &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{22}^{k, \text{Re}} & -\mathbf{F}_{22}^{k, \text{Im}} \\ \mathbf{F}_{22}^{k, \text{Im}} & -\mathbf{F}_{22}^{k, \text{Re}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2, \cos}^k \\ \mathbf{U}_{2, \sin}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2, \cos}^k \\ \mathbf{P}_{2, \sin}^k \end{bmatrix}; \\ \mathbf{F}_{22}^{k, \text{Re(Im)}} &= \left[\int_{\Omega^h} \int_{\Omega^h} F_{22}^{\text{Re(Im)}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) N_i(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right]_{i, j = \overline{1, N+1}}, \\ \mathbf{P}_{2, \cos(\sin)}^k &= \left[\sum_{q=1}^{N+1} p_{2, \cos(\sin)}^k(\mathbf{x}^{h,q}) \int_{\Omega^h} N_q(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]_{j = \overline{1, N+1}}, \\ \mathbf{U}_{2, \cos(\sin)}^k &= \left[\Delta u_{2, \cos(\sin)}^k(\mathbf{y}^{h,j}) \right]_{j = \overline{1, N+1}}. \end{aligned}$$

Результаты численных исследований. На рис. 1 представлено распределение разрыва перемещений берегов трещины в статическом случае, полученное с использованием равноотстоящих интерполяционных узлов, когда в (3) $\alpha = 1$, $N = 10$ (рис. 1,а) или 30 (рис. 1,б). Кривые 1 соответствуют аналитическому решению, кривые 2 и 3 получены соответственно при помощи метода Галеркина и метода коллокаций с кусочно-постоянной аппроксимацией [1, 2], причем аналитическое решение имеет вид [8, 9]

$$\Delta u_2^{an}(\mathbf{x}) = \frac{2(1-\nu)}{\mu} pl \sqrt{1 - (x_1/l)^2},$$

где $\nu = 0,25$ – коэффициент Пуассона, p – интенсивность нагрузки. Как

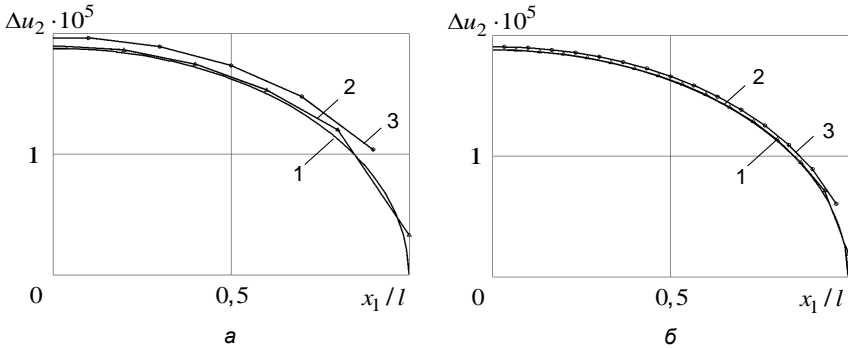


Рис. 1

видно из рис. 1, решение, полученное с использованием метода Галеркина значительно ближе к аналитическому решению, чем аналогичное решение, полученное методом коллокаций.

На рис. 2 приведены результаты вычисления максимальной погрешности численного решения задачи в зависимости от параметра α , отвечающего за расстояние между интерполяционными узлами. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям N , равным 10, 20, 30. Видно, что вне зависимости от количества узлов интерполяции наиболее точные результаты получаются при значениях α , близких к трем.

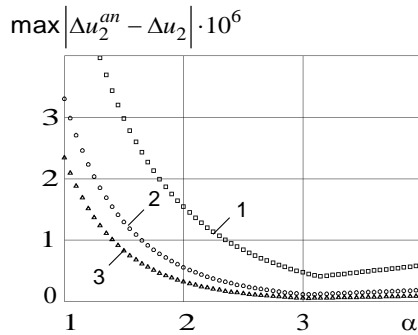


Рис. 2

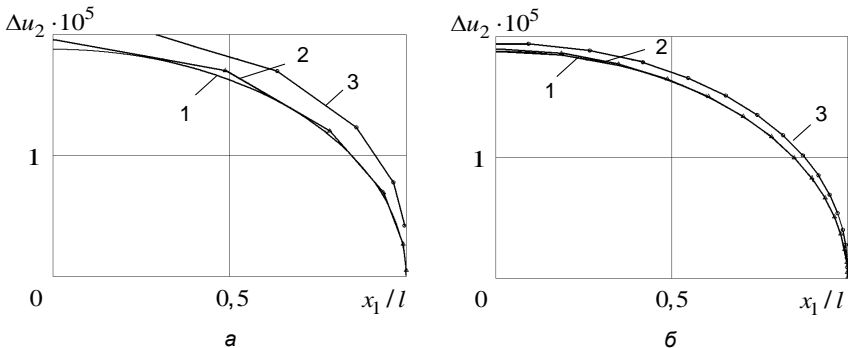


Рис. 3

Последнее видно из данных рис. 3 для $\alpha = 3,0$ (обозначения такие же, как на рис. 1).

Отметим, что точность численного решения имеет особое значение именно в окрестности вершины трещины, где определяются коэффициенты интенсивности напряжений.

РЕЗЮМЕ. Метод Галеркіна з лінійними неперервними елементами застосовано для чисельного розв'язку задачі про контактну взаємодію протилежних берегів лінійної тріщини під впливом нормального гармонічного навантаження. Досліджено залежність чисельного розв'язку від параметрів просторової апроксимації.

SUMMARY. The Galerkin method with piecewise linear continuous elements was used in order to numerically solve the problem of the contact interaction of opposite faces of a linear crack under a normal harmonic loading. The dependence of the numerical solution versus parameters of the space approximation was investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Guz A. N.* Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms // Intern. Appl. Mech. 2000. Vol. 36, № 12. P. 1537–1564. 2. *Guz A. N., Zozulya V. V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks // Intern. Appl. Mech. 2002. Vol. 38, № 8. P. 895–932. 3. *Guz A. N., Zozulya V. V., Men'shikov A. V.* Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // Intern. Appl. Mech. 2003. Vol. 39, № 12. P. 1425–1428. 4. *Guz A. N., Zozulya V. V., Men'shikov A. V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Appl. Mech. 2004. Vol. 40, № 2. P. 156–159. 5. *Zozulya V. V., Men'shikova M. V.* Dynamic contact problem for a plane with a finite crack // Intern. Appl. Mech. 2002. Vol. 38, № 12. P. 1459–1463. 6. *Zozulya V. V., Men'shikova M. V.* Study of iterative algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // Intern. Appl. Mech. 2002. Vol. 38, № 5. P. 573–577. 7. *Fletcher C. A. J.* Computational Galerkin methods. Springer-Verlag, New York, Berlin, Tokyo, 1984. 345 p. 8. *Balas J., Sladek J., Sladek V.* Stress analysis by boundary element methods. Elsevier, Amsterdam, 1989. 688 p. 9. *Sih G. C., Loeber J. F.* Wave propagation in an elastic solid with a line of discontinuity or finite crack // Quart. Appl. Math. 1969. Vol. 27, № 2. P. 193–213.

University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, UK
Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 18.01.2005

Меньшиков О. В., Меньшикова М. В. Використання методу Галеркіна при дослідженні контактної взаємодії берегів тріщини

Menshykov O. V., Menshykova M. V. Use of the Galerkin method for the investigation of the crack's faces contact interaction