УДК 539.3 МЕХАНИКА

А.В. Меньшиков

Применение метода Галеркина в задаче о гармоническом нагружении пространства с трещиной

(Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем)

Рассмотрим однородное, изотропное и линейно упругое трехмерное пространство, содержащее трещину без начального открытия, расположенную в координатной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} : x_3 = 0\}$. Предположим, что в пространстве с частотой ω распространяется гармоническая волна растяжения-сжатия или сдвига.

Под воздействием падающей волны противоположные берега трещины перемещаются относительно друг друга, взаимодействуя между собой. При этом в изменяющейся во времени области контакта берегов трещины возникают отличные от нуля силы контактного взаимодействия. Будем предполагать, что для нормальных и касательных компонент векторов разрыва перемещений и контактных сил взаимодействия выполняются односторонние ограничения Синьорини и закон трения Кулона [1, 2]. Контактное взаимодействие берегов трещины существенно влияет на распределение компонент напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины, поэтому влияние упомянутого взаимодействия обязательно должно быть учтено при решении задач механики разрушения для тел с трещинами под воздействием гармонического нагружения.

В работах [2-7] было впервые получено численное решение задач о гармоническом нагружении круговой и эллиптической трещин с учетом контактного взаимодействия берегов трещины, проведено исследование распределения коэффициентов интенсивности напряжений нормального отрыва и продольного и поперечного сдвигов, дана оценка влияние контакта берегов трещины. Во всех указанных работах задача решалась при помощи метода коллокаций с использованием кусочно-постоянной аппроксимации на каждом элементе. Однако, как известно, использование разрывных аппроксимаций приводит к тому, что утрачивается строгое обоснование сходимости метода, хотя метод коллокаций с постоянными элементами и дает во многих случаях хорошие результаты [8].

Следуя [1, 2], представим компоненты векторов нагрузки $p_j(\mathbf{x},t)$ и разрыва перемещений $\Delta u_j(\mathbf{x},t)$ тригонометрическими рядами Фурье для $j = 1,2,3$

$$p_j(\mathbf{x},t) = \frac{p^0_{j,cos}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(p^k_{j,cos}(\mathbf{x})\cos(\omega_k t) + p^k_{j,sin}(\mathbf{x})\sin(\omega_k t)\right),$$

$$\Delta u_j(\mathbf{x},t) = \frac{\Delta u^0_{j,cos}(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{x})\cos(\omega_k t) + \Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{x})\sin(\omega_k t)\right),$$

коэффициенты которых связаны системой граничных интегральных уравнений [1, 2, 7]:

$$\begin{aligned} p^k_{n,cos}(\mathbf{x}) - i p^k_{n,sin}(\mathbf{x}) = \\ -\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\left(F^{Re}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k) + iF^{Im}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)\right)\left(\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}) - i\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y})\right)d\mathbf{y}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F^{Re}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)$ и $F^{Im}_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)$ - действительные и мнимые части фундаментальных решений динамической теории упругости $F_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)$, которые в рассматриваемом случае имеют вид [2-7].

Будем искать решение системы граничных интегральных уравнений (1) при помощи метода Галеркина с пробным решением на основе линейных конечных элементов [8, 9]. Аппроксимируем поверхность трещины Ω множеством плоских треугольных и четырехугольных элементов Ω_l^h, $l=\overline{1,N}$, тогда пробное решение будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}) = \sum_{q=1}^{Q} N_q(\mathbf{y})\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}^{h,q}), \quad \Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}) = \sum_{q=1}^{Q} N_q(\mathbf{y})\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}^{h,q}),\\ k\in\mathbb{N}_0 \text{ (натуральные числа и нуль)}, \quad j=1,2,3, \quad \mathbf{y}\in\Omega^h := \bigcup_{l=1}^{N}\Omega_l^h,\end{gathered} \tag{2}$$

где $N_q(\mathbf{y})$, $q=\overline{1,Q}$ - пробные функции (кусочно-линейные функции формы), а $\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}^{h,q})$ и $\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}^{h,q})$ - значения неизвестных в узловых точках $\mathbf{y}^{h,q}$.

Аналогичные выражения имеют место для коэффициентов Фурье компонент вектора нагрузки.

В глобальных координатах функции формы имеют вид

$$N_q(\mathbf{y}) = c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_1 y_2,$$

где коэффициенты c_0, c_1, c_2 и c_3 различны для каждого элемента Ω_l^h. Внутри элемента источниками ненулевых вкладов являются узловые неизвестные в углах этого элемента и связанные с ними функции формы.

Подстановка выражений (2) в систему уравнений (1) позволяет вычислить невязку

$$\begin{aligned}R_n^k(\mathbf{x}) = &\sum_{q=1}^{Q} N_q(\mathbf{x})\left(p^k_{n,cos}(\mathbf{x}^{h,q}) - ip^k_{n,sin}(\mathbf{x}^{h,q})\right)\\ &+\sum_{j=1}^{3}\sum_{q=1}^{Q}\left(\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}^{h,q}) - i\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}^{h,q})\right)\int\limits_{\Omega^h}\left(F^{Re}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k) + iF^{Im}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)\right)N_q(\mathbf{y})d\mathbf{y},\end{aligned}$$

где $k\in\mathbb{N}_0$, $n=1,2,3$.

Для того чтобы получить алгебраические уравнения для определения неизвестных $\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}^{h,q})$ и $\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}^{h,q})$, внутреннее произведение взвешенных невязок полагается равным нулю:

$$\int\limits_{\Omega^h} W_m(\mathbf{x})R_n^k(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \quad \text{для} \quad m=\overline{1,Q}, \quad k\in\mathbb{N}_0, \quad n=1,2,3,$$

где $W_m(\mathbf{x})$ - весовые функции, которые в методе Галеркина выбираются из того же семейства функций, что и пробные функции, то есть $W_m(\mathbf{x}) = N_m(\mathbf{x})$, $m=\overline{1,Q}$. Это приводит нас к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{Q}\left(p^k_{n,cos}(\mathbf{x}^{h,q}) - ip^k_{n,sin}(\mathbf{x}^{h,q})\right)\int\limits_{\Omega^h} N_m(\mathbf{x})N_q(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{q=1}^{Q}\left(\Delta u^k_{j,cos}(\mathbf{y}^{h,q}) - i\Delta u^k_{j,sin}(\mathbf{y}^{h,q})\right)\\ \times\int\limits_{\Omega^h}\int\limits_{\Omega^h}\left(F^{Re}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k) + iF^{Im}_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)\right)N_m(\mathbf{x})N_q(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y},\end{aligned}$$

$$m=\overline{1,Q}, \quad k\in\mathbb{N}_0, \quad n=1,2,3.$$

С учетом вида фундаментальных решений $F_{nj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)$, матричная форма вышеприведенной системы уравнений:

$$\mathbf{F}_\tau^k\mathbf{U}_\tau^k=\mathbf{P}_\tau^k \quad \text{for } k\in\mathbb{N}_0, \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_n^k\mathbf{U}_n^k=\mathbf{P}_n^k \quad \text{for } k\in\mathbb{N}_0, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{F}_\tau^k=\begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{11}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{11}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{11}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{11}^{k,Re} & \mathbf{F}_{12}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{12}^{k,Re} \\ -\mathbf{F}_{21}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{21}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{21}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{21}^{k,Re} & \mathbf{F}_{22}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{22}^{k,Re} \end{bmatrix},\quad \mathbf{U}_\tau^k=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{1,cos}^k\\ \mathbf{U}_{1,sin}^k\\ \mathbf{U}_{2,cos}^k\\ \mathbf{U}_{2,sin}^k\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_\tau^k=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{1,cos}^k\\ \mathbf{P}_{1,sin}^k\\ \mathbf{P}_{2,cos}^k\\ \mathbf{P}_{2,sin}^k\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_n^k=\begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{33}^{k,Re} & -\mathbf{F}_{33}^{k,Im} \\ \mathbf{F}_{33}^{k,Im} & -\mathbf{F}_{33}^{k,Re}\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}_n^k=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{3,cos}^k\\ \mathbf{U}_{3,sin}^k\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_n^k=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{3,cos}^k\\ \mathbf{P}_{3,sin}^k\end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{F}_{qp}^{k,Re(Im)}=$$

$$=\begin{bmatrix} \int\limits_{\Omega^h}\int\limits_{\Omega^h} F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)N_1(\mathbf{x})N_1(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} & \dots & \int\limits_{\Omega^h}\int\limits_{\Omega^h} F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)N_1(\mathbf{x})N_Q(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{\Omega^h}\int\limits_{\Omega^h} F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)N_Q(\mathbf{x})N_1(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} & \dots & \int\limits_{\Omega^h}\int\limits_{\Omega^h} F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)N_Q(\mathbf{x})N_Q(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{p,cos}^k=\begin{bmatrix}\Delta u_{p,cos}^k(\mathbf{y}^{h,1})\\ \vdots \\ \Delta u_{p,cos}^k(\mathbf{y}^{h,Q})\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}_{p,sin}^k=\begin{bmatrix}\Delta u_{p,sin}^k(\mathbf{y}^{h,1})\\ \vdots \\ \Delta u_{p,sin}^k(\mathbf{y}^{h,Q})\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{p,cos}^k=\begin{bmatrix}\sum\limits_{q=1}^{Q}p_{p,cos}^k(\mathbf{x}^{h,q})\int\limits_{\Omega^h}N_q(\mathbf{x})N_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}\\ \vdots \\ \sum\limits_{q=1}^{Q}p_{p,cos}^k(\mathbf{x}^{h,q})\int\limits_{\Omega^h}N_q(\mathbf{x})N_Q(\mathbf{x})d\mathbf{x}\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_{p,sin}^k=\begin{bmatrix}\sum\limits_{q=1}^{Q}p_{p,sin}^k(\mathbf{x}^{h,q})\int\limits_{\Omega^h}N_q(\mathbf{x})N_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}\\ \vdots \\ \sum\limits_{q=1}^{Q}p_{p,sin}^k(\mathbf{x}^{h,q})\int\limits_{\Omega^h}N_q(\mathbf{x})N_Q(\mathbf{x})d\mathbf{x}\end{bmatrix}.$$

К сожалению, на настоящий момент не представляется возможным получить аналитические выражения для двойных интегралов от функций $F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)N_i(\mathbf{x})N_j(\mathbf{y})$. Поэтому будем предполагать, что интегрирование по переменной $\mathbf{x}$ будет проводиться численно с использованием любой квадратурной формулы. Тогда, учитывая наличие в интегральных ядрах $F_{qp}^{Re(Im)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega_k)$ гиперсингулярных и слабосингулярных особенностей [2-7], для вычисления коэффициентов линейных алгебраических уравнений (3) и (4) необходимо вычислить расходящиеся интегралы вида

$$J_\gamma^{\alpha,\beta,a,b}(\mathbf{x},\Omega_j^h)=\int\limits_{\Omega_j^h}\frac{(x_1-y_1)^\alpha(x_2-y_2)^\beta y_1^a y_2^b}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}^{\,\gamma}}d\mathbf{y}, \tag{5}$$

где

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2; \;\; \alpha + \beta = 0, 2; \;\; \gamma = 3, 5; \;\; \gamma - \alpha - \beta = 1, 3; \quad a, b = 0, 1.$$

В работах [10, 11] для регуляризации подобных расходящихся интегралов была применена интегральная формула Остроградского-Грина для двумерного оператора Лапласа, и были получены выражения для случая, когда $a = b = 0$.

Учитывая ограниченность объема настоящей работы, приведем лишь некоторые выражения для интегралов (5), полученные с использованием подобного подхода:

$$J_1^{0,0,0,0}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = -\int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r} n_2(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y},$$

$$J_1^{0,0,1,0}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = -\int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r} n_2(\mathbf{y}) \right) y_1 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} r n_1(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

$$J_1^{0,0,0,1}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = -\int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r} n_2(\mathbf{y}) \right) y_2 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} r n_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

$$J_1^{0,0,1,1}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = -\int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r} n_2(\mathbf{y}) \right) y_1 y_2 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} r (y_2 n_1(\mathbf{y}) + y_1 n_2(\mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

$$J_3^{0,0,0,0}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r^3} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r^3} n_2(\mathbf{y}) \right) d\mathbf{y},$$

$$J_3^{0,0,1,0}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r^3} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r^3} n_2(\mathbf{y}) \right) y_1 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \frac{n_1(\mathbf{y})}{r} d\mathbf{y},$$

$$J_3^{0,0,0,1}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r^3} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r^3} n_2(\mathbf{y}) \right) y_2 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \frac{n_2(\mathbf{y})}{r} d\mathbf{y},$$

$$J_3^{0,0,1,1}(\mathbf{x}, \Omega_j^h) = \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \left(\frac{x_1 - y_1}{r^3} n_1(\mathbf{y}) + \frac{x_2 - y_2}{r^3} n_2(\mathbf{y}) \right) y_1 y_2 d\mathbf{y} - \int\limits_{\partial\Omega_j^h} \frac{y_2 n_1(\mathbf{y}) + y_1 n_2(\mathbf{y})}{r} d\mathbf{y}.$$

Результаты, представленные в настоящей работе, позволяют применить метод Галеркина с кусочно-линейными функциями формы для решения задач механики твердого деформируемого тела с трещинами при динамическом нагружении с учетом контактного взаимодействия берегов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Немецкой Службы Академических Обменов (DAAD, Ref. 322, PKZ: A/03/12873).

Список литературы

[1] *Гузь А.Н., Зозуля В.В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках.: Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. / Под ред. А.Н. Гузя. - Т. 4, кн. 2. - Киев, 1993. - 236 с.

[2] *Guz A.N., Zozulya V.V.* Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with cracks, // Intern. Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 8. - P. 895-932.

[3] *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* On one contact problem in fracture mechanics for a normally incident tension-compression wave // Intern. Applied Mechanics. - 2002. - **38**, No 7. - P. 824-828.

[4] *Guz A.N., Menshykov O.V, Zozulya V.V.* Surface contact of elliptical crack under normally incident tension-compression wave // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. - 2003. - **40**, No 3. - P. 285-291.

[5] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* Three-dimensional contact problem for an elliptic crack interacting with a normally incident harmonic compression-expansion wave // Intern. Applied Mechanics. - 2003. - **39**, No 12. - P. 1425-1428.

[6] *Guz A.N., Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Applied Mechanics. - 2004. - **40**, No 2. - P. 156-159.

[7] *Меньшиков А.В.* Учет контакта берегов стационарной круговой трещины при гармоническом нагружении // Доп. НАН України. - 2004. - № 8. - С. 43-47.

[8] *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1987. - 524 с.

[9] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 352 с.

[10] *Zozulya V.V., Gonzalez-Chi P.I.* Weakly singular, singular and hypersingular integrals in elasticity and fracture mechanics // Journal of the Chinese Institute of Engineers. - 1999. - **22**, No 6. - P. 763-775.

[11] *Zozulya V.V., Men'shikov V.A.* Solution of three-dimensional problems of the dynamic theory of elastycity for bodies with cracks using hypersingular integrals // Intern. Applied Mechanics. - 2000. - **36**, No 1. - P. 74-81.

Александр Васильевич Меньшиков
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова 3, 03057 Киев, Украина

Menshykov O.V.

Application of the Galerkin method to solve the problem for the space with a crack under harmonic loading

The present paper is devoted to the application of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for linearly elastic, homogeneous and isotropic solid with a plane crack under harmonic loading with allowance for the contact interaction of crack's adjoining faces. The corresponding systems of linear algebraic equations were obtained. The divergent integrals in event of piecewise-linear shape functions were regularized.

Меньшиков А.В.

Применение метода Галеркина в задаче о гармоническом нагружении пространства с трещиной

Настоящая работа посвящена особенностям применения метода Галеркина при численном решении задачи механики разрушения для линейно упругого, однородного и изотропного пространства с плоской трещиной под воздействием гармонической нагрузки при учете контактного взаимодействия противоположных берегов трещины. Получены системы линейных алгебраических уравнений задачи. Проведена регуляризация расходящихся интегралов, которые имеют место при использовании кусочно-линейных функций формы.